Zur experimentellen Bestätigung des Grundgesetzes der Dynamik.

Von

Dr. **O. Troje,**
Professor am Altstädtischen Gymnasium.

Beilage zum Jahresbericht Ostern 1908.



Königsberg i. Pr.
Hartungsche Buchdruckerei.
1908.

Progr. Nr. 8.

Zur experimentellen Bestätigung des Grundgesetzes der Dynamik.

1. Die Schwierigkeiten, welche die sichere Beherrschung des Experiments dem Lehrer der Physik ohnehin im reichen Masse bietet, vermehren sich nicht unbeträchtlich, wenn es sich um den experimentellen Beweis eines der grossen umfassenden Naturgesetze handelt. Denn, soll der eigentliche Zweck erreicht werden, soll der Schüler den überzeugenden Eindruck zwingender Naturnotwendigkeit erhalten, so darf man sich hier nicht mit blosser Annäherung begnügen. Es genügt nicht, die störenden Einflüsse zu kennen und darauf hinzuweisen, dass bei ihrer genaueren Berücksichtigung das Gesetz wirklich mit Präzision zum Ausdruck kommen würde. Es erscheint durchaus unerlässlich, in gesonderten Vorversuchen jene Fehlerquellen eingehend genug zu studieren, um sie bei den Hauptversuchen entweder in geigneter Weise zu beseitigen, oder, falls das nicht möglich, sie ziffernmässig mit in Ansatz bringen zu können. Das kann mitunter recht unbequem sein, und so verzichtet man häufig zu Gunsten einer rein deduktiven oder historischen Darstellung auf dieses wirkungsvollste Spezifikum des physikalischen Unterrichts: die Veranschaulichung eines Naturgesetzes im quantitativen Versuch.

An keiner Stelle der Experimentalphysik ist mir das Gesagte so handgreiflich entgegengetreten wie bei dem experimentellen Beweise des Grundgesetzes der Dynamik, welches bekanntlich besagt, dass eine konstant wirkende Kraft gleich dem Produkt aus der bewegten Masse und der durch jene Kraft bewirkten Beschleunigung ist. Es fehlt nicht an Apparaten, die zum Beweise dieses Gesetzes dienen. In der Atwood'schen Fallmaschine besitzen wir sogar seit weit über 100 Jahren einen von ganz hervorragenden Qualitäten. Aber auch der Höfler'sche Schienenapparat oder elastische Zugvorrichtungen können mit Erfolg benutzt

werden. Alle diese Apparate haben aber die Eigentümlichkeit, dass ihre Verwendung die Kenntnis gewisser Hilfsgrössen, Trägheitsmomente und Reibungswiderstände voraussetzt. Diese variieren von Apparat zu Apparat, und da sie durch Rechnung allein nur ausnahmsweise gefunden werden können, die Methoden zu ihrer experimentellen Bestimmung aber nicht immer einwandfrei sind und leicht irreführen, so gilt hier bis auf den heutigen Tag eine treffende Bemerkung Josef Stefans: ,,Was der Atwood'schen Fallmaschine zu ihrer allgemeinen Verbreitung geholfen hat, ist eigentlich ein Missverständnis; sie ist erfunden worden, um die Beziehungen zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung zu demonstrieren, und man verwendet sie heute, um einen verlangsamten freien Fall vorzuführen“.[1])

Um etwas zur Beseitigung dieses im Grunde ungerechtfertigten Zustandes beizutragen, habe ich mit allen mir bekannten Versuchsanordnungen, welche zum Beweise jenes Fundamentalgesetzes dienen, messende Versuche angestellt und sie alle allmählich so weit abgeändert, bis sie für die Demonstration geeignet waren. In den Einzelheiten dienten mir dabei zum Vorbilde die Angaben, welche Weinhold über seine Form der Fallmaschine macht. Aber es sei ausdrücklich bemerkt, dass es sich im folgenden nicht wie bei Weinhold um ein spezielles Modell oder andere ein für allemal ausprobierte Apparate von bestimmter Konstruktion handelt. Letztere gibt es überhaupt nicht. Dem Physiklehrer kann die Mühe des Selberausprobierens meiner Ansicht nach nur erleichtert, nie aber abgenommen werden. Vorausgesetzt sind vielmehr nur Apparate, die überall vorhanden oder leicht zu beschaffen sind: nämlich: eine beliebige, aber sorgfältig gearbeitete Atwood'sche Fallmaschine und eine horizontale Schienenbahn, am zweckmässigsten und billigsten z. B. die Galileische Fallrinne in Volkmannscher Form.[2]) Diese beiden Apparate können dann einzeln oder kombiniert zu allen in Frage kommenden Versuchsanordnungen für fortschreitende Bewegung verwendet werden. Apparate mit nur drehender Bewegung der beschleunigten Masse, wie der Universalapparat von L. G. Friedrich Müller sind für die Messungen nicht berücksichtigt, da sie für die erste Einführung in die Dynamik ungeeigneter erscheinen als jene.

2. Q u a l i t a t i v e V e r s u c h e. Bevor auf die messenden Versuche eingegangen wird, lohnt es vielleicht,

---

1) Von Obermayer, Zur Erinnerung an Josef Stefan.
2) Poskes Zeitschrift, Band 7 pag. 164, 1894.

von einigen qualitativen hierhergehörigen Versuchen zu sprechen, welche die einschlägigen Begriffe illustrieren, obwohl sie sämtlich nicht einwandfrei sind. Dass zur Erläuterung des Begriffs der Masse Stosskräfte benutzt werden, welche Kugeln von gleichem Durchmesser aber verschiedener Masse verschiedene Geschwindigkeiten erteilen, dürfte allgemein bekannt sein.[1])

Für die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Masse benutzte Sohncke in seinen Vorlesungen einen Apparat, den ich bisher nirgend beschrieben gefunden habe. An einem hölzernen Rahmengestell sind 2 Horizontalpendel — Eisendrähte von 4—5 mm Dicke und 70 cm Länge — bifilar und parallel zu einander in ca. 10 cm Abstand aufgehängt, die an ihren vorderen Enden je eine metallene Voll- und Hohlkugel von je 4 cm Durchmesser tragen. Letztere sind durch Gegengewichte äquilibriert. Bringt man nun zwischen beide Kugeln in mittlerem Abstande eine beiderseits geriebene Ebonitscheibe, so bewegen sich die Kugeln auf diese zu mit Beschleunigungen, die den Massen umgekehrt proportional sind. In ähnlicher Weise kann ein von Karl T. Fischer[2]) beschriebener Apparat verwandt werden. Man lässt 2 Metallwalzen verschiedener Masse, die durch eine elastische gespannte Feder verbunden sind, gleichzeitig los und beobachtet, dass die schwerere sich langsamer in Bewegung setzt. In beiden Fällen sind aber die Bewegungsursachen nicht konstant. Endlich gehört auch der bekannte Foucaultsche Versuch hierher, nach welchem ein mittelst Zentrifugalmaschine rotierender Magnet eine möglichst nah über ihm schwebende Kupferscheibe durch Induktionswirkung in Mitrotation zu versetzen vermag. Hat man zwei Scheiben von verschiedener Masse zur Verfügung, deren Abstand vom Magneten aber derselbe ist, so kann man seine Schüler schon bei der Demonstration dieses Versuchs darauf aufmerksam machen, um wieviel langsamer sich die schwerere Scheibe in Drehung versetzen lässt.

I. Atwoods Fallmaschine.

3. Die Theorie der Atwoodschen Fallmaschine wird am einfachsten aus dem Energieprinzip abgeleitet. Werden die gleich grossen Massen mit M bezeichnet, die Masse des Übergewichts mit m, das Trägheitsmoment der Rolle, bezogen auf die Drehungsachse mit K, die Winkelgeschwindig-

1) Vergl. z. B. Volkmann, Poskes Zeitschrift l. c. pag. 165. 1894.
2) R. T. Fischer, Neuere Versuche zur Mechanik, pag. 17. 1902.

keit der Rolle mit w, der Radius der Schnurrinne mit r, das Fadengewicht mit μ, und ist zu irgend einer Zeit t die erlangte Geschwindigkeit v, so beträgt die kinetische Energie des ganzen bewegten Systems

$$\tfrac{1}{2}\, v^2\, (2\, M + m + \mu) + \tfrac{1}{2}\, K\, w^2,$$

oder da $v = r\, w$ ist,

$$\tfrac{1}{2}\, v^2 \left(2\, M + m + \mu + \frac{K.}{r^2}\right).$$

Die gleichzeitige Abnahme der potentiellen Energie beträgt $m\, g\, s$ und da $v = a\, t$ und $s = \frac{a}{2}\, t^2$ ist, so folgt die Beschleunigung a

$$a = \frac{m\, g}{2\, M + m + \mu + \frac{K}{r^2}}.$$

Hierin hat $x = \frac{K}{r^2}$ die Dimension und Bedeutung einer Masse, nämlich derjenigen, welche in der Entfernung des Schnurlaufs von der Rollenachse angebracht, deren Masse zu ersetzen imstande ist; dieses x heisse die Ersatzmasse der Rolle. Setzt man ferner $p = m\, g$, wobei p das Gewicht des Übergewichts, also das Mass für die wirkende Kraft ist, und beachtet, dass nur ihr um die Reibung y verminderter Betrag wirksam ist, so kann man die letzte Gleichung in der bekannten Form schreiben

$$p - y = (2\, M + m + \mu + x)\, a.$$

Dieses ist die Gleichung, deren Richtigkeit die Atwoodsche Fallmaschine möglichst exakt bestätigen soll. Sie entspricht, spezialisiert für diesen Apparat dem Grundgesetz: Kraft gleich Masse mal Beschleunigung.

Die Grössen x und y sind hier offenbar ungebetene Gäste, deren Einfluss man aber konstruktiv nur herabdrücken, nicht beseitigen kann. Atwood hat das bekanntlich dadurch erreicht, dass er für die Lagerung der möglichst leicht, also durchbrochen gearbeiteten Rolle Friktionsräder benutzte, und er hat so die Aufmerksamkeit von diesen störenden Faktoren derart abgelenkt, dass man noch vor einigen Jahrzehnten glaubte, ganz von ihnen absehen zu dürfen. So wird in den älteren Auflagen von Jochmanns Experimentalphysik die Ersatzmasse der Rolle, und in der Praktischen Physik von Kohlrausch die Reibung ohne weiteres vernach-

lässigt, ohne zu beachten, dass solche Vernachlässigungen immer nur relativ, niemals absolut vorgenommen werden dürfen. Wenn, wie es in einem später zu erwähnenden Beispiel der Fall, das Übergewicht p = 2 gr und die Reibung y trotz Friktionsrädern = 0,9 gr beträgt, so ist eine solche Vernachlässigung der Reibung sicher unstatthaft. Aber auch abgesehen von diesem Ausnahmefall wird es für Präzisionsversuche immer wünschenswert bleiben, die Beträge von x und y zu kennen, ehe man sie ignoriert.

Eine andere Schwierigkeit bietet der Faden; er liefert bei der gewöhnlichen Form der Fallmaschine stets einen bald grösseren, bald kleineren positiven oder negativen Beitrag zum Übergewicht. Wiederholt ist darauf hingewiesen, dass man diesem Übelstande dadurch abhelfen kann, dass man die beiden Laufgewichte auch unterhalb durch einen Faden mit einander verknüpft. Das erfordert aber allerhand unbequeme Abänderungen der Nebenapparate. Wählt man jedoch zum Faden chirurgische Nähseide, die auch starke Belastungen vorzüglich aushält, während der ganze Faden nicht mehr als 0,5 gr zu wiegen braucht, so werden die dadurch entstehenden Fehler auch für gut geübte Beobachter unmerkbar. Letztere Anordnung verdient daher nach meinen Erfahrungen den Vorzug.

4. Wie hat man nun x und y auszuwerten? Vorab sei bemerkt, dass von den beiden Grössen x und y nur die Ersatzmasse x eine wirkliche Apparat-Konstante ist, die Grösse der Reibung y dagegen hängt zum mindesten von der Belastung ab, ohne ihr indes im strengen Sinne des Gesetzes proportional zu sein. Sie variiert aber auch in kleinen Grenzen mit der Zeit und gibt jede Änderung des Apparates wieder. So ist z. B. selbstverständlich davor zu warnen, die Achse zu ölen, wenn man nicht nach dem Versuch das Öl wieder sorgfältig entfernen will. Auch bestimmt sich die Grösse der Reibung nur schwer mit Genauigkeit, und so kann die von Chwolson[1]) vorgeschlagene Methode, zuerst die Reibungen bei zwei verschiedenen Belastungen in gesonderten Versuchen zu bestimmen und daraus die Grösse x zu ermitteln, von praktischer Seite gewiss nicht empfohlen werden. Aber ebenso wenig können nach meinen Erfahrungen die so oft in Lehrbüchern angegebenen Anweisungen befürwortet werden, in zwei gesonderten Versuchen bei annähernd gleicher Gesamtmasse und daher annähernd gleicher Reibungsgrösse nur das Übergewicht p zu ändern, und aus

1) Chwolson, Lehrbuch der Physik, Band I, pag. 383.

den dann aus obiger Formel entstehenden zwei Gleichungen x und y auszuwerten. Hat man nicht schon vorher ganz bestimmte numerische Anhalte, welche mindergeglückte von geglückten Versuchen zu unterscheiden gestatten, so erfordern diese Versuche unnütz Zeit und Geduld, ohne dafür mit einem wirklich zuverlässigen Resultat zu lohnen.

Ähnliche Erfahrungen scheinen Weinhold veranlasst zu haben, um diesen Schwierigkeiten einfach aus dem Wege zu gehen, seiner Rolle die Gestalt einer massiven kreisrunden Scheibe zu geben, deren Trägheitsmoment theoretisch bekannt ist. Seinem Beispiel sind dann später C. G. Friedrich Müller und mit einer Variante A. Höfler gefolgt. Zur Vermeidung der Reibung hat man dann nur nötig, das Übergewicht durch eine Zulage soweit zu vergrössern, dass die Fallgesetze präzise erfüllt werden. Leider ist diese an sich einwandfreie Methode an ein bestimmtes Modell gebunden und versagt bei dem sicher weit verbreiteten Atwoodschen Originalmodell. Und doch lässt sich auch mit diesem schon historisch wichtigen Apparat genau dasselbe erreichen, wenn man sich nur entschliesst, die Ersatzmasse $\frac{K}{r^2}$ und den Reibungswiderstand gesondert zu bestimmen und nicht mehr die eine Grösse aus der Bestimmung der andern zu folgern. Der Weg dazu ist im folgenden dargestellt.

5. Die von mir früher benutzte Atwoodsche Fallmaschine stammte aus dem Jahre 1834. Sie besass Friktionsräder von sorgfältiger Arbeit, Laufgewichte in der Form von Messinghülsen mit Bayonetverschluss, welche beliebige Tara aufnehmen konnten, und hatte nur den einen störenden Fehler, dass der Faden zu nahe am Stativ vorbeiführte, so dass das sinkende Übergewicht längs der Skala noch immer eine Extrareibung erfuhr. Der Apparat wurde dann von mir unter möglichster Anlehnung an das Atwoodsche Original unter Beibehaltung der Friktionsräder umgebaut und gleichzeitig auch zum ersten Mal das Trägheitsmoment der Rolle bestimmt. Die ebenso einfache wie genaue Methode dazu ist schon 1873 von C. Bender[1]) angegeben. Hängt man das Rad der Fallmaschine auf einer zu seiner Achse parallelen Schneide lose auf und lässt es schwingen,[2]) so ist die Schwingungszeit bekanntlich gegeben durch

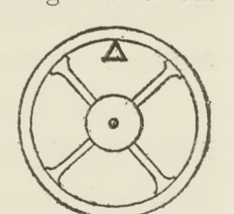
---

1) C. Bender, Bestimmung der Reibungswiderstände an der Atwoodschen Fallmaschine, Pogg. Ann. Band 149, 1873.

2) Vergl. auch E. Mischpeter, Die Behandlung des Trägheitsmoments in der Schule. Programm 1896.

$$t = \pi \sqrt{\frac{K_1}{M_1 g a_1}}$$

wenn M_1 die Masse des Rades, K_1 sein Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse, g die Fallbeschleunigung und a_1 den Abstand zwischen der Drehachse und der durch den Schwerpunkt des Rades gehenden Radachse bedeutet. In meinem Falle war $M_1 = 77{,}46$ gr, $2a_1$ (mit den Spitzen des Zirkels abgetastet) $= 9{,}83$ cm. Ferner ergab sich in 3 Versuchen die Zeit von



200	Vollschwingungen	zu	108,25	sec.
200	„	„	108,75	„
200	„	„	108,90	„

und daraus die einfache Schwingungszeit $t = 0{,}2716$ sec.

Diese Zeiten werden am bequemsten mit einer Stechuhr, wie sie überall zum Inventar der Turnhalle gehört, ermittelt. Umhängen des Rades und Vergleich der dadurch geänderten oder nicht geänderten Schwingungszeit lässt Rückschlüsse auf richtige Form- und Massenverteilung des Rades zu. Als Schneide benutzte ich eine alte dreikantige Feile, welche auf 2 Flächen abgeschliffen war, so dass an einer Stelle eine präzis gradlinige Schneide entstand. Die Enden der Feile steckten in 2 Klötzen, die am Rande von 2 gleich hohen von einander gerückten Tischen lagen. Hieraus berechnet sich

$$K_1 = \left(\frac{0{,}2716}{\pi}\right)^2 . 77{,}46 . 981{,}4 . 4{,}915 = 2795 \text{ gr cm}^2.$$

Nach einem bekannten Satz der Mechanik ist dann das Trägheitsmoment K, bezogen auf die durch den Schwerpunkt des Rades gehende Radachse

$$K = K_1 - M_1 a_1^2$$
$$= 2795 - 77{,}46 . 4{,}915^2 = 2795 - 1863 = 932 \text{ gr cm}^2.$$

Um hieraus den Wert für die Ersatzmasse x abzuleiten, hat man noch den Radius der Fadenrinne nötig. Auch diesen findet man am genauesten durch Abtasten des Durchmessers mit dem Zirkel, dessen Schenkel durch den Einsatz verlängert und dessen Spitzen nach innen gebogen sind. Es war so $2\,r = 10{,}17$ cm. Weniger genau ist es, einen dünnen Draht in die Fadenrinne zu legen, an der Stelle, wo sich die beiden Drahtenden überschneiden, nach festem Anziehen derselben mit irgend einem scharfen Gegenstand eine gemeinsame Marke einzureissen und nach Abwickelung den Abstand dieser beiden Marken zu messen. Es war so $2\,r\,\pi =$

32,35 cm, woraus r = 5,149 cm folgt. Dieser Wert ist noch um die doppelte Drahtdicke 2 . 0,05 = 0,1 cm zu verkleinern, so dass r in dieser weniger genauen Weise 5,049 cm wäre. Unter Benutzung des ersteren Wertes folgt $x = \frac{932}{5,085^2} =$ 36,03 gr. Hierzu noch einige Bemerkungen:

1) Der Wert von x sollte eigentlich nach der gewöhnlichen Theorie zwischen $\frac{M_1}{2}$ und M_1 liegen, also hier zwischen 38,73 und 77,46 gr.[1]) Dabei wird jedoch eine homogene zylindrische Scheibe oder ein Kreisring für die Rolle angenommen, und weder sind heraustretende Teile der Nabe, noch die stählerne Radachse mitberücksichtigt. Diese tragen relativ viel zur Masse, dagegen wenig zum Trägheitsmoment bei, so dass das obige Resultat durchaus zuverlässig ist.

2) Die obige Methode leistet dasselbe, was Weinhold durch den Kunstgriff der massiven Rolle erreicht, ja, genau genommen, noch mehr. Denn die zylindrische Scheibenform der Rolle wird durch die Fadennut gerade an der für den Wert des Trägheitsmoments empfindlichsten Stelle beeinträchtigt. Auch läuft der Faden nicht auf dem Rande der zylindrischen Scheibe, die Voraussetzungen der Rechnung sind also in der Praxis nicht ganz voll erfüllt.

3) Die Ersatzmasse x ist, wie der verhältnismässig hohe Betrag im obigen Falle zeigt, nicht wohl möglich als blosse Korrekturgrösse zu behandeln. Ihre Messung erfordert, wie gezeigt, nur 2 Längen-, eine Zeit- und eine Massenbestimmung, und ist also auch leicht genug, um genau selbst mit den einfachen Mitteln der Schule durchgeführt zu werden. Hierauf mit Nachdruck hinzuweisen, war eine der Hauptabsichten dieser Arbeit.

6. Die Kenntnis der Ersatzmasse ermöglicht nun die willkürliche Wahl der Beschleunigung a. Nach Weinholds erprobten Vorschlägen wählte ich als Normaleinheit dafür 10 cm sec^{-2} und als Übergewichte 2, 4 und 6 gr-Gewichte. Dann musste $2\,M + m + \mu + x = 196$

$$\text{oder } 2\,M + \mu = 196 - 6 - 36 = 154 \text{ gr}$$

werden. Dieser Rechnung entsprechend verschaffte ich mir für die definitiven Versuche 2 zylindrische Messing-

---

1) Vgl. z. B. Chwolson, Experimentalphysik, Band I, pag. 382.

gewichte von 3 cm Durchmesser und ca. 1,7 cm Höhe, welche in ihrer Achse 7,5 cm lange Eisendrähte trugen, die oben in Messingknöpfen endeten. Aus einer feinen Bohrung der letzteren lief der Seidenfaden, welcher die beiden Gewichte mit einander verband; er wog 0,55 gr. Auf jeden dieser Träger konnten noch 2 seitlich geschlitzte Messinggewichte von je 98 gr heraufgeschoben werden. Diese 6 Messinggewichte waren alle fast genau gleich hoch, die beiden untersten aber soweit von oben her zylindrisch ausgebohrt, dass ihre Masse zusammen mit der Fadenmasse gerade 154 gr betrug. Dadurch erhielten sie Schalenform und konnten zur Aufnahme der Reibungsgewichte benutzt werden, welch letztere den Grammbruchteilen eines gewöhnlichen Gewichtssatzes entnommen wurden. Als Übergewichte dienten 3 kreisförmige, radial eingeschnittene Messingscheiben von 4 gr, 1 gr und 1 gr, von gleichem Durchmesser wie die Laufgewichte. Sie dienten als Deckel für jene Schalen und verhinderten das Herausspringen der Reibungsgewichte beim Aufschlagen der sinkenden Masse. Für das Übergewicht 2 gr lag das 4 gr-Gewicht auf der sinkenden Masse, die beiden Grammgewichte auf der entgegengesetzten Seite; für 4 gr Übergewicht wurde eines von ihnen, für 6 gr beide nach vorne gelegt. In dieser Form hat sich der Apparat seither in vielfachen Versuchen bewährt, nur hat sich herausgestellt, dass sich die Reibung im Laufe der Zeit nicht völlig gleich bleibt. Während nämlich die zuerst nach der Herstellung des Apparates notierten Reibungsgewichte für die einfache, doppelte und dreifache Masse der Laufgewichte 0,2, 0,4 und 0,5 gr waren, betrugen sie 2 Monate später 0,3, 0,4 und 0,55 gr und gegenwärtig sogar 0,35, 0,6 und 0,9 gr bei stets unveränderter und ungeölter Achse. Das zeigt deutlich, dass man vor jeder Demonstration die Reibung noch einmal im besondern Versuch bestimmen muss.

7. Den einfachsten Weg hierzu, nämlich denjenigen, die sinkende Masse um so viel zu vergrössern, bis das zweite Fallgesetz präzise erfüllt wird, dürfen wir hier nicht einschlagen. Die Bestätigung der Formel des Grundgesetzes würde auf diese Weise völlig illusorisch, worüber kein noch so tadelloses Gelingen der Versuche hinwegtäuschen kann. Und wenn man auch die nun folgenden Messungen aus Zeitmangel nicht in der Stunde selbst vornehmen wird, so kann doch ein begabterer Schüler ohne Schwierigkeit vorher die Kontrolle des letztmalig erhaltenen Wertes, resp. seine Neubestimmung vorgenommen haben.

Von den beiden zu diesem Zwecke gebräuchlichen Methoden bevorzuge ich diejenige, bei welcher man es durch kleine Zulagen zur sinkenden Masse allmählich dahin bringt, dass die Bewegung nach Abheben des Übergewichts durch den Ring in den nächsten 3 Sekunden eine gleichförmige wird. Das Übergewicht muss dabei so klein gewählt werden, dass es die Reibung durch sein Fortfallen nicht wesentlich beeinträchtigt, und der Faden muss, wie schon oben erwähnt, so leicht wie möglich sein. So ergab z. B.

Versuch I.

$$2\,M + m + \mu + \frac{K}{r^2} = 196\,gr;\; m = 2\,gr;\; f = 0{,}35\;gr.$$

Das Übergewicht wird abgehoben bei (45—1,7) cm

nach	3 sec.	3 sec.	3 sec.
Erlangte Endgeschwindigkeit v =	$30\,\frac{cm}{sec.}$	$30\,\frac{cm}{sec.}$	$30\,\frac{cm}{sec.}$
nach weiteren	1 sec.	2 sec.	3 sec.
findet das Aufschlagen statt bei	75 cm	105 cm	135 cm
Geschwindigkeit	$30\,\frac{cm}{sec.}$	$30\,\frac{cm}{sec.}$	$30\,\frac{cm}{sec.}$

Versuch II.

$$2\,M + m + \mu + \frac{K}{r^2} = 392\,gr;\; m = 4\,gr;\; f = 0{,}6\,gr.$$

Die Marken werden genau wie im obigen Schema erreicht.

Versuch III.

$$2\,M + m + \mu + \frac{K}{r^2} = 588\,gr;\; m = 6\,gr;\; f = 0{,}9\,gr.$$

Die Marken werden wie im obigen Schema erreicht.

Auf den ersten Blick scheint es, als ob die hier gefundenen Reibungsgewichte, nämlich 0,35, 0,6 und 0,9 gr dem Gewicht nicht proportional sind, beachtet man aber, dass hier für die Reibung nicht die Ersatzmasse der beweglichen Rolle, sondern ihre eigentliche Masse, also statt 36,03 77,46 gr in Ansatz gebracht werden müssen, so verhalten sich die Massen, die die Rollenachse belasten wie 237,43 : 433,43 :

629,43 = 1 : 1,866 : 2,651, und dementsprechend müssten die Reibungsgewichte statt des Verhältnisses 0,35 : 0,6 : 0,9 das Verhältnis 0,35 : 0,64 : 0,93 aufweisen. Da nun über 0,05 gr hinaus die Genauigkeit über 0,05 gr Zulage hinaus nicht getrieben werden konnte, so stimmen diese Werte, abgerundet, vollkommen mit den theoretisch verlangten überein.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die drei Beobachtungssätze absichtlich unter vollkommen gleichen Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsverhältnissen angestellt sind.

8. Interessant ist es, mit diesen Resultaten diejenigen zu vergleichen, welche mit einer andern, in Lehrbüchern öfters zu findenden Methode für den Wert der Reibungsgewichte gewonnen werden können. Danach setzt man die Masse, deren Reibung an der Fallmaschine bestimmt werden soll, durch ein leichtes Übergewicht in gleichförmig beschleunigte Bewegung, lässt dieses durch den Ring nach s cm abheben und beobachtet die Strecke s_1, welche die sinkende Masse durchläuft, bis sie zur Ruhe kommt. Setzt man das Übergewicht als so klein voraus, dass es weder die Reibung, noch die Grösse der sinkenden Masse wesentlich alteriert, so hat man für die Bewegung bis zum Ringe nach dem Energieprinzip die Gleichung:

$$(p - f)\, s = \tfrac{1}{2} v^2 \left(2\,M + m + \mu + \frac{K}{r^2}\right).$$

für den Endlauf dagegen:

$$f\, s_1 = \tfrac{1}{2} v^2 \left(2\,M + \mu + \frac{K}{r^2}\right)$$

und daher $$(p - f)\; s = f\, s_1,$$

woraus folgt $$f = \frac{s\;\; p.}{s + s_1}$$

Die Vernachlässigung von m gegen die übrige sinkende Masse verursacht in allen hier vorliegenden Fällen einen Fehler, der innerhalb der Grenzen der Beobachtung liegt. Bei den auf diesem Wege von mir angestellten Versuchen wurde s durchweg der bequemen Rechnung wegen gleich 25 cm gewählt, der Ring aber um die Höhe der sinkenden Masse nach oben verschoben. Er stand bei

Versuch I	Versuch II	Versuch III
23,3 cm	21,5 cm	19,8 cm

Die sinkenden Massen waren dieselben wie in obigen Versuchen. Also ohne Rolle

	Versuch I	Versuch II	Versuch III
	160 gr	356 gr	552 gr,

wovon stets 2 gr als Übergewicht abgehoben wurden.

Für s_1 ergab sich:

	117,3	74,4	53,8
	117,2	78	53,2
	109	78	62,2
	112	78	54,8
	122	76,3	59
	111,3	78	69,5
	125,2		
Mittel	116,3 cm	77,1 cm	58,75 cm

Daraus folgt für die Reibung:

$f_1 = 0{,}43$ gr. $f_2 = 0{,}65$ gr. $f_3 = 0{,}85$ gr.

Die scheinbar sehr grosse Genauigkeit, welche diese Methode ermöglicht, wird zunächst beeinträchtigt durch die ziemlich grossen Abweichungen, welche die einzelne Einstellung gegen das Mittel aufweist. Das liess einerseits auf kleinere individuelle Eigentümlichkeiten des benutzten Apparates, andrerseits auf eine sehr grosse Empfindlichkeit schliessen. Tatsächlich erwiesen sich bei Wiederholungen, welche mit der grössten Vorsicht angestellt wurden, schon unbedeutende Pendelschwankungen der nach hinten gelegenen Masse als recht störend. Als solche Elongationen von mässiger Amplitude senkrecht zur Fadenebene in einem speziellen Fall einmal absichtlich hergestellt wurden, ging die Einstellung von 67,8 auf 46 cm zurück. Die eben zitierten sorgfältigeren Versuche zeigten in einzelnen Fällen noch die Eigentümlichkeit, dass die sinkende Masse ganz zuletzt etwas über ihre Ruhestellung hinausgegangen war, da sie von ihrem tiefsten Punkt schliesslich noch fast 3 cm in die Höhe stieg. In Ansatz wurde dann die Mittelstellung zwischen der tiefsten und der Ruhelage gebracht. Die Werte für die Reibungsgewichte ergaben sich hier für die einfache, doppelte und dreifache Last zu $f_1 = 0{,}425 \pm 0{,}020$; $f_2 = 0{,}633 \pm 0{,}007$; $f_3 = 0{,}781 \pm 0{,}113$ gr. Diese letzteren Werte weichen noch mehr als die früheren von den im vorigen Paragraphen angegebenen Resultaten ab. Was aber das Auffälligste ist, sie sind den sinkenden Massen, auch wenn man die ganze Rollenmasse mit in Rechnung zieht, nicht proportional. Legt man das Reibungsgewicht f_2 als zuverlässigstes zu-

grunde, so würden sich die auf die Rollenachse drückenden Lasten 237,43, 433,43 und 629,43 gr zu einander verhalten wie 0,346 : 0,633 : 0,919. Dies Resultat würde ausgezeichnet mit dem im vorigen Paragraphen nach der ersten Methode gewonnenen übereinstimmen, weicht aber von den wirklich gefundenen Werten um ca 18 % ab und zwar bei f_1 nach entgegengesetzter Seite wie bei f_3. Dass diese Abweichungen sich nicht aus Beobachtungsfehlern erklären lassen, zeigt ein Vergleich mit den früheren, nach gleicher Methode (vergl. oben) erhaltenen Resultaten. Berücksichtigt man indessen, dass die 3 hier in Frage kommenden Versuchsreihen mit ungleichen Geschwindigkeiten angestellt sind, und dass die Reibung da, wo die Geschwindigkeit die grösseste war, auch den grössten Wert erlangt hat, d. h. bei der ersten Versuchsreihe, so würden jene Abweichungen auf eine Abhängigkeit der Reibung von der Geschwindigkeit hindeuten. Die Untersuchung dieser Verhältnisse geht aber über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, da man für ihre Zwecke das Reibungsgewicht doch nicht genauer als auf 0,05 gr zu kennen braucht.

9. Im Anschluss hieran muss einer von C. Bender[1]) angegebenen Methode gedacht werden, welche wohl auf die des vorigen Paragraphen zurückgeführt hätte, wenn der Verfasser nicht sowohl in seinen Voraussetzungen über die Reibung als auch in den benutzten Formeln sich Unrichtigkeiten hätte zu Schulden kommen lassen. Es geht weder an, die Reibung als eine konstante Kraft zu betrachten, „unter deren Einfluss ein beweglicher Körper die Beschleunigung μ erlangt", noch ist die erlangte Endgeschwindigkeit

$\sqrt{2g\frac{m}{M+m}\cdot h} - \sqrt{2\mu h}$, wofür es vielmehr heissen

müsste: $\sqrt{2h\cdot\frac{p-f}{M+m}}$ Dabei bedeutet p das Übergewicht, f die Reibung, h die Fallhöhe und M + m die gesamte bewegte Masse.

10. Unter Zugrundelegung der bisher gewonnenen Resultate, nämlich des Wertes von 36,03 gr für die Ersatzmasse x der Rolle und der Reibungsgewichte von 0,35, 0,6 und 0,9 gr bei den drei verschiedenen Achsenbelastungen, wurden nun die Hauptversuche angestellt, deren Resultate in folgender Tabelle enthalten sind:

---

1) Pogg. Ann. Bd. 149, Pag. 122. 1873.

Versuch	Gesamtmasse	Über-gewicht	Reibungs-gewicht	Fallzeit	Fall-raum	Beschleunigung
1	196 gr	2 gr	0,35 gr	3 sec. 4 „ 5 „	45 cm 80 „ 125 „	10 cm sec.$^{-2}$
2	„	4 „	„	3 sec. 4 „	90 cm 160 „	20 cm sec.$^{-2}$
3	„	6 „	„	2 sec. 3 „	60 cm 135 „	30 cm sec.$^{-2}$
4	2 . 196 = 392 gr	2 gr	0,6 gr	5 sec. 6 „ 7 „	62,5 cm 90 „ 122,5 „	5 cm sec.$^{-2}$
5	„	4 „	„	3 sec. 4 „ 5 „	45 cm 80 „ 125 „	10 cm sec.$^{-2}$
6	„	6 „	„	3 sec. 4 „	67,5 cm 120 „	15 cm sec.$^{-2}$
7	3 . 196 = 588 gr	2 gr	0,9 gr	7 sec. 8 „ 9 „	81,7 cm 106,7 „ 135 „	$\frac{10}{3}$ cm sec.$^{-2}$
8	„	4 „	„	4 sec. 5 „ 6 „ 7 „	53,3 cm 83,3 „ 120 „ 163,3 „	$\frac{20}{3}$ cm sec.$^{-2}$
9	„	6 „	„	3 sec. 4 „ 5 „	45 cm 80 „ 125 „	10 cm sec.$^{-2}$

Die fast überraschende Übereinstimmung zwischen Vorausberechnung und Experiment entschädigt reichlich für die Mühe der voraufgehenden Sondermessungen, wie sie andrerseits für den Schüler die Gültigkeit des Gesetzes „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ aufs schlagendste bestätigt.

II. Schienenapparat nach Höfler.

11. Die geistreiche und elegante Atwoodsche Fallmaschine mit ihrem geräuschlosen Gang und geheimnisvollen Rädermechanismus steht dem noch ungeübten Verständnis des Schülers jedenfalls ferner als das zweite hier in Frage kommende Demonstrationsmittel, nämlich ein kleiner vierrädriger Wagen, welcher unter der Einwirkung einer konstanten Zugkraft auf horizontaler Ebene gleichförmig beschleunigt dahinläuft. Wählt man, um die Gradlinigkeit

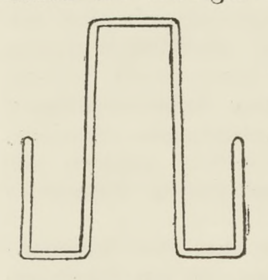
der Bewegung festzulegen, eine Schienenbahn und als Zugkraft ein sinkendes Gewicht, so entsteht von selbst der Schienenapparat von Höfler[1]) in derjenigen Gestalt, wie er zum Beweise des Grundgesetzes der Dynamik verwandt werden kann. Eine Gestalt, die so übersichtlich und einfach ist, dass sie auch Poske in seine physikalischen Lehrbücher für die Schule übernommen hat. Der Schienenapparat ist gewissermassen nichts anderes als eine Fallmaschine, welche durch eine zur Fadenebene senkrechte Symmetrieebene halbiert, und deren hinterer Schenkel um 90° bis zur Horizontalen aufgedreht ist. Das früher hinten aufsteigende Gewicht läuft nun auf der horizontalen Schiene und muss zur Verminderung der Reibung Rollenunterlagen bekommen, während das vorne herabsinkende Gewicht, da es nicht mehr Gleichgewicht herzustellen, sondern nur als Zugkraft zu wirken hat, eine entsprechende Verminderung erfahren kann.

12. Von diesem Gesichtspunkt aus kann der Schienenapparat durch jede Galileische Fallrinne, die ein Schienengeleise besitzt, in ihrem horizontalen Teile ersetzt werden, während als vertikaler die ohnehin in den physikalischen Kabinetten vorhandene Fallmaschine dienen kann. Wenigstens gilt das für die genaue Untersuchung, namentlich die der Reibung, wo Ring und Teller unentbehrlich sind, während für die eigentlichen Demonstrationen die vertikale Skala vollständig überflüssig scheint, da alle Abmessungen an der horizontalen ebenso gut vorgenommen werden können. So habe ich für die folgenden Untersuchungen, wie schon im Eingange erwähnt, die Galileische Fallrinne Volkmannscher Form benutzt, die gegenüber dem Höflerschen Apparat mit seiner Spurweite von 1 dcm den schmalspurigen Typus repräsentiert (2 cm). Sie besteht aus einer über 3 m langen, 11,5 cm hohen und 2 cm dicken Holzlatte, welche, hochkant gestellt, auf 2 an den beiden Enden befindlichen Füssen ruht. Auf der oberen schmalen Kante ist ein abgeschlichtetes Façoneisen nebenstehender Form angeschraubt, während die beiden weissgestrichenen Breitseiten der Latte die Massteilung tragen. Diese Fallrinne wurde mittelst zweier auf dem Experimentiertisch untergeschobener Böcke so hoch gestellt, dass das Schienengeleise die ungefähre Höhe der Rolle der Fallmaschine erreichte, ihre Horizontalität mit Libelle und Keilen hergestellt und die Rollenebene durch Visieren

---

1) Poske's Zeitschrift, Band 7, pag. 276, 1894.

möglichst genau in die Fortsetzung des Geleises gebracht. Der Wagen bestand aus einem Messingrahmen, hochkant, von 10,4×3 cm, in dessen 10 mm hohe, 4 mm dicke Längsseiten sich die Bohrungen für die beiden stählernen Radachsen befanden. Jede von letzteren trug aufgekeilt 2 Räder von Aluminium (28,5 mm Durchmesser), welche nach Art der Eisenbahnräder nur auf der Innenseite einen hohen Rand (Vorstossscheibe) hatten, so dass schon hierdurch ein etwaiges Herunterfallen des Wagens verhindert wurde. An diesen Wagen liessen sich vorn und hinten 2 aus 3 mm dickem, 10 mm breitem Messingband hergestellte Träger nebenstehender Form mittelst Stahlzapfen aufstecken. Das Messingband der Träger lief ca. 9 cm in etwas abgespreizter Stellung an der Seite der Fallrinne herab, war unten doppelt rechtwinklig umgebogen, so dass die Hakenenden beiderseits zur Aufnahme beliebiger Lastgewichte (Bleibarren von unten anzugebendem Gewicht) benutzt werden konnten. Die dadurch erzielte Tieflegung des Schwerpunktes gewährleistete den sicheren Gang des Wagens. Am vorderen Rahmenende trug ein kleiner angeschraubter Blechansatz 3 Löcher nebeneinander, von denen das mittelste für gewöhnlich den zum Seidenfaden führenden Karabinerhaken aufnahm. Senkrecht dazu war ein zweites kleines rechteckiges Messingblech angeschraubt, das für gewisse Zwecke als Marke zu dienen hatte. Es betrug das



Gewicht des Wagens allein	121,91 gr
das Gewicht der beiden Träger .	167,47 „
Zwei kleine Bleibarren	210,34 „
Daher Belastung I = . .	499,72 gr
Zwei grosse Bleibarren	498,845 „
Daher Belastung II = .	998,565 „

Da es sich zunächst nur um die ersten orientierenden Versuche handelte, so genügte dieses ungefähre Verhältnis der beiden Massen von 1 : 2. Als Faden diente ein einfacher Seidenfaden mit kleinen Karabinerhaken an den Enden, vom Gewicht 0,31 gr. Vor den Versuchen wurde die Fallmaschine mit den Stellschrauben so weit gehoben, dass der Faden parallel zur horizontalen Eisenschiene lief. Da das Loslassen des Wagens aus freier Hand zu unsicher erschien, wurde hinter dem Wagen auf der Fallrinne mit einer starken

Klammer ein zweiarmiger Hebel befestigt, dessen eines oberhalb mit Blei beschwertes Ende in der Ruhestellung auf den hinteren Rädern auflag und den Wagen bremste.

13. Wie stellt sich nun bei diesem Apparat der Einfluss der Hilfsgrössen auf die Massbestimmungen des zu prüfenden Grundgesetzes? Das Trägheitsmoment der rotierenden Teile erscheint um ein weniges erhöht, nämlich um dasjenige der Aluminiumräder. Ihr Gesamtgewicht, inkl. der stählernen Achsen betrug 30,9 gr. Da dieses im Vergleich zu der Last I nur einen geringen Betrag ausmacht, schien es hinreichend, von einer genauen Bestimmung abzusehen und für die Ersatzmasse der Räder die Hälfte der Masse als Zuschlag in Ansatz zu bringen (also 15,45 gr). Der Erfolg hat dies bestätigt. Ersetzt man bei den definitiven Versuchen die Rolle der Fallmaschine durch ein kleines, in Spitzen laufendes Aluminiumrädchen, so kann die Ersatzmasse der rotierenden Apparatteile jedenfalls noch kleiner gemacht werden als bei der Atwoodschen Fallmaschine. Doch ist dies meiner Ansicht nach kein wesentlicher Vorteil, denn da man die wirkliche Masse, die bei dem Versuch in Bewegung gesetzt wird, in jedem Falle korrigieren muss, andrerseits sie vor den Augen der Schüler doch nicht wägt, so kommt es schliesslich auf dasselbe heraus, ob der beim Versuch in Anrechnung gebrachte Betrag der Masse einen grösseren oder kleineren Prozentsatz an Ersatzmasse enthält, wenn man denselben nur eben mit genügender Genauigkeit kennt.

Dafür ist die Reibung bei dem Schienenapparat von vornherein viel höher in Anschlag zu bringen als bei der Atwoodschen Fallmaschine, zumal da absichtlich von einer Ölung der Achsen abgesehen wurde. Sie ist zusammengesetzt aus der Achsenreibung der Fallmaschinenrolle, wo sie sehr unbedeutend geworden ist gegenüber den Versuchen des vorigen Kapitels, der Reibung der Räder auf den Schienen (wozu event. auch ein geringer Beitrag seitlicher Reibung für die grösseren inneren Radfelgen kommt) und der Zapfenreibung der beiden Radachsen. Die Grösse der Reibung zu bestimmen wurde zuerst durch allmähliches Neigen der Fallrinne versucht, doch befriedigten die gewonnenen Resultate hinsichtlich ihrer Genauigkeit nicht. Zuverlässigere Ergebnisse erhält man mit der Methode des Paragraph 7, welche für die Belastung I als Grösse der Reibung $f_1 = 3{,}44$ und für die Belastung II $f_2 = 6{,}91$ gr lieferte. Die Proportionalität zwischen Belastung und Reibung hat sich auch weiter bei diesem Apparat bestätigt.

Für diese Versuche waren 2 leichte Messingschälchen konstruiert, von denen das für Belastung I verwandte 2,94 gr, das für Belastung II bestimmte dagegen 5,015 gr wog. Während die Schalen selbst zur Aufnahme der Reibungsgewichtszusätze und der Zuggewichte dienten, trug ein am oberen Ende des die Schale haltenden vertikalen Drahts angelötetes rundes Messingscheibchen bei dem kleineren Schälchen in 1,7 cm, bei dem grösseren in 2,7 cm Abstand vom Schalenboden das bei den Reibungsversuchen abzuhebende Übergewicht.

Die etwa auf das Zehnfache gesteigerten Beträge für die Reibung bilden die Hauptunannehmlichkeit des Höflerschen Apparats. Für kleinere Zuggewichte versagt die Methode völlig, und auch bei grösseren ergibt sich bei Verdoppelung der Last leicht die Schwierigkeit, dass der Wagen nicht exakt losgeht. Nun könnte man zur Verminderung der Reibung erstens daran denken, das Wagengewicht zu verkleinern, das hat aber wieder den Nachteil, dass dann die Hauptmasse den Korrekturgrössen gegenüber zu sehr abnimmt. Andrerseits könnte man die Räder in Spitzen laufen lassen; das verbietet sich aber, wenigstens bei dem von mir benutzten Apparate, wieder durch geringe Unregelmässigkeiten des Façoneisens.

Ich habe daher auf die Reduktion der Reibungsgrösse durch besondere Massnahmen verzichtet, zumal da für den einen allein auszuprobierenden Satz von Demonstrationsversuchen sich schliesslich immer hinlänglich günstige Bedingungen finden lassen.

14. Die eigentlichen Versuche wurden sodann mit Zuggewichten von 10 und 20 gr angestellt. Entsprachen sie aber auch, wie sich voraussehen liess, völlig der zu beweisenden Formel, so liessen sie doch noch nach der pädagogischen Seite hin zu wünschen übrig. Denn da sich die Zugkräfte zwar wie 1 : 2 verhielten, die in Bewegung gesetzten Massen aber durch Hinzutreten der Ersatzmassen der rotierenden Teile dieses nicht taten, sondern im Verhältnis von 561,2 : 1070 standen, so ergab die einfache Masse, durch die einfache Zugkraft in Bewegung gesetzt, scheinbar eine andere Beschleunigung als die doppelte Masse mit der doppelten Zugkraft. Dies erforderte in der Grösse der bewegten Massen noch eine Abänderung, welche dann weiter noch dadurch mitbedingt wurde, dass ich wie Weinhold mit seinen Versuchen an der Fallmaschine nicht nur 2, sondern 3 bewegte Massen von dem Verhältnis 1 : 2 : 3 zu verwenden beabsichtigte. Da es ferner sich in einem besonderen Ver-

such herausstellte, dass eine Gesamtwagenlast von 1500 gr ein Minimum von 10 gr Zuggewicht erforderte, um sich präzis beschleunigt in Bewegung zu setzen, so wurde als Einheit der Zugkraft das Gewicht von 12 gr gewählt. Und dieser Wert forderte dann seinerseits als bequemen Wert für die Einheit der Last den Betrag von 588,84 gr, weil dadurch $a = \frac{12 \,.\, 981{,}4}{588{,}84} = 20 \text{ cm sec}^{-2}$ wird. Im ganzen wurden 3 Zuggewichte aus Messing, von je 12 gr benutzt, in bekannter, geschlitzter Scheibenform, und diejenigen, welche bei dem einzelnen Versuch nicht als Zugkraft mitwirkten, auf den Wagen gelegt, so dass die bewegte Gesamtmasse bei Verdoppelung und Verdreifachung der Zugkraft unverändert blieb.

Bei den Hauptversuchen betrug daher

das Gewicht des Wagens allein . . .	121,91	gr
das Gewicht der beiden Träger . . .	167,47	„
zwei kleine Bleibarren	211,67	„
Ersatzmasse der Räder	15,45	„
Ersatzmasse der Fallmaschinenrolle. .	36,03	„
3 Zuggewichte à 12 gr	36,00	„
Fadengewicht	0,31	„
Daher Belastung I	588,84	„

Zwei grosse Bleibarren à 294,42 gr =	588,84	gr
Daher Belastung II = 2 × 588,84 =	1177,68	gr
Dazu nochmals 2 Bleibarren à 294,42 gr =	588,84	„
Daher Belastung III = 3 × 588,84 gr =	1766,52	„

15. Den Hauptversuchen voran gingen Bestimmungen für die Grösse der Reibung, die sich aber bei späteren Wiederholungen auf eine einzige Messung reduzieren können, da sich die Proportionalität der Reibung mit der Wagenlast bei den vorliegenden Versuchen durchweg als richtig erwiesen hat. Immerhin bleibt die kleine Unbequemlichkeit bestehen, dass jedesmal, wenn ein Zuggewicht von 12 gr vom Wagen genommen und auf die Wagschale gelegt wird, das Reibungsgewicht wenn auch nur um den kleinen Betrag von 0,14 gr verändert werden muss. Die Ergebnisse dieser Reibungsbestimmungen, die wieder nach der Methode von § 7 angestellt wurden, finden sich in der folgenden Tabelle für die Hauptversuche.

Versuch	Gesamtmasse	Zuggewicht	Reibungs-gewicht	Fallzeit	Fallraum	Beschleunigung
1	588,84 gr	12 gr	6,1 gr	2 sec. 3 „ 4 „	40 cm 90 „ 160 „	20 cm sec.$^{-2}$
2	„	2 . 12 gr= 24 „	6,0 gr	2 sec.	80 cm	40 cm sec.$^{-2}$
3	„	3 . 12 gr= 36 „	5,9 gr	2 sec.	120 cm	60 cm sec.$^{-2}$
4	2 . 588,84 gr= 1177,68 „	12 gr	13,2 gr	3 sec. 4 „ 5 „	45 cm 80 „ 125 „	10 cm sec.$^{-2}$
5	„	2 . 12 gr= 24 „	13,1 gr	2 sec. 3 „ 4 „	40 cm 90 „ 160 „	20 cm sec.$^{-2}$
6	„	3 . 12 gr= 36 „	13,0 gr	2 sec. 3 „	60 cm 135 „	30 cm sec.$^{-2}$
7	3 . 588,84 gr= 1766,52 „	12 gr	20,2 gr	5 sec. 6 „ 7 „	83,33 cm 120 „ 163,33 „	$\frac{20}{3}$ cm sec.$^{-2}$
8	„	2 . 12 gr= 24 „	20,1 gr	3 sec. 4 „	60 „ 106,7 cm	$\frac{40}{3}$ cm sec.$^{-2}$
9	„	3 . 12 gr= 36 „	19,9 gr	2 sec. 3 „ 4 „	40 cm 90 „ 160 „	20 cm sec.$^{-2}$

Die Versuche erledigten sich fast ausnahmslos glatt und sicher. Allerdings waren dazu 2 Beobachter nötig, von denen der eine die Null- und die Endstellung der Wagschale kontrollierte, während der andere lediglich für den präzisen Abgang des Wagens auf den Glockenschlag des Metronoms zu sorgen hatte. Mitunter, wie beim Versuch 3 ist auch noch eine dritte Hilfe wünschenswert, um den sehr schnell fahrenden Wagen aufzuhalten. Schwierig ist allein der Versuch 7, bei welchem das Verhältnis zwischen Zugkraft und Wagenlast für das exakte Losfahren des Wagens ungünstig ist, so dass man den Versuch eventuell unter geringer Verdrehung der Radachsen wiederholen muss.

Hat man einmal die Grösse der Reibung für diese Versuche festgestellt, so ist, wie schon bemerkt, Ring und Teller und die ganze Fallmaschine eigentlich entbehrlich, da alle

Strecken ebensogut an der horizontalen Fallrinne abgesteckt werden können. Die in dieser Richtung mögliche Vereinfachung des Apparates ist gegenwärtig noch nicht völlig abgeschlossen, es wird darüber später berichtet werden.

III. Versuche nach Pfaundler und Wiechert.

16. Pfaundler beschreibt in dem ersten Bande seines Lehrbuchs der Physik eine Versuchsanordnung, bei welcher nicht sinkende Gewichte, sondern elastische Bänder von konstanter Spannung als Zugkräfte benutzt werden; und ähnlich verfährt Oliver J. Lodge (Elementary Mechanics, New Edition, 1900, pag. 46). Die im vorigen Kapitel (S. 21) durchgeführte Methode ermöglicht nun ohne Schwierigkeit ein Urteil über die Zuverlässigkeit solcher Versuche, welche, wenn einwandfrei, fraglos eine ausgezeichnete Einführung in dies Gebiet abgeben würden. Als elastische Bänder verwendet man passend dünnsten Stahldraht (0,1 mm) welcher zu Spiralen von 13 cm Länge und 3 mm Dicke aufgewunden und an den Enden mit Karabinerhaken versehen wird. Die konstante Spannung erzielt man nach einem Kunstgriff von Herrn E. Wiechert dadurch, dass man auf einen prismatischen Meterstab einen durch Reibung festsitzenden Blechschieber mit Haken an eine bestimmte Stelle, z. B. 20 cm von der Kante, bringt. zwischen dem Haken des Schiebers und einer Öse am vorderen Wagenende die Drahtspirale spannt und zwar derart, dass der Nullpunkt des Massstabes sowohl im Ruhe- als auch im bewegten Zustande des Wagens von einer am Wagen angebrachten Marke einen möglichst konstanten Abstand, z. B. 1 mm behält. Dabei muss der Massstab parallel zur Bahn gehalten werden. Als letztere ist wieder die Fallrinne der Tischplatte vorzuziehen, einmal, weil sie eine sichere Führung garantiert und dann wegen der geringeren Reibung von Metall auf Metall. Im ganzen handelt es sich um 4 Versuche, nämlich die einfache Wagenlast durch die einfache und die doppelte Zugkraft, und die ebenso auf das Doppelte gebrachte Wagenlast durch einfache und doppelte Zugkraft in gleichförmig beschleunigte Bewegung zu versetzen. Auf den ersten Blick erscheint die Verdoppelung der Zugkraft nicht schwieriger als die Verdoppelung der Wagenlast. Wählt man nämlich als Einheit der Zugkraft eine bestimmte Federspannung, z. B. 20 cm von der Wagenkante bis zum Haken am Blechschieber, so wird die doppelte Zugkraft sich dadurch her-

stellen lassen, dass man eine gleichartige Spirale der ersten parallel schaltet. Dazu ist nichts weiter erforderlich, als dass am vorderen Ende des Wagens 2 weitere Ösen im gleichen Abstande von der ersten angebracht und damit korrespondierend im selben Abstand 2 weitere Haken rechts und links vom ersten am Blechschieber quer zum Meterstabe angelötet werden. Versucht man aber, diesen Gedankengang in die Praxis zu übertragen, so überzeugt man sich leicht von seiner höchstens annäherungsweisen Geltung. Von jener als Einheit angenommenen Zugkraft wird ein Teil nämlich lediglich zur Überwindung der Reibung verwandt, und nur der Rest wirkt als Kraft im eigentlichen Sinne. Schaltet man die zweite Feder der ersteren parallel, so übernimmt jede die Hälfte der Reibung, die Federn dürfen also, um die doppelte Zugkraft auszuüben, nicht ganz so stark gespannt werden, als die einzelne. Noch schlimmer liegt es, wenn die verdoppelte Wagenlast durch die Spannung der einzelnen Feder in Bewegung versetzt werden soll. Da diese nun nicht nur die einfache Reibung, sondern die doppelte zu überwinden hat, muss sie jedenfalls gegen ihren früheren Betrag vergrössert werden.

Aus alle dem ist zu ersehen, von welch einschneidender Bedeutung hier der Betrag der Reibung und wie notwendig ihre Mitberücksichtigung ist, wenn diese Art des Experiments sich für die Demonstration eignen soll.

17. Ziffernmässige Anhalte zur Beurteilung liefern Beobachtungen, welche an die Experimente des vorigen Kapitels anschliessen. Will man für die Versuche mit Spiralfedern dieselben Beschleunigungen erzielen wie dort (vergl. S. 21), so müssen die Wagenbelastungen allerdings etwas grösser gewählt werden, da sowohl die Rolle der Fallmaschine mit ihrer Ersatzmasse als auch die Masse des sinkenden Gewichts in Wegfall kommen und nur die Ersatzmasse der Wagenräder übrig bleibt. Es muss daher die Belastung I = 588,84 — 15,45 = 573,39 gr und die Belastung II = 1177,68— 15,45 = 1162,23 gr gemacht werden, was sich auch durch aufgesetzte Gewichtsstücke leicht erreichen lässt. Diesen Belastungen entsprachen an dem Tage der Beobachtung als Werte der Reibung 6,85 und 13,90 gr, Interpolationswerte aus einer Wiederholung der Versuche 1 und 4 des § 15, die statt 6,14 und 13,22 gr für die Reibung 6,29 und 13,35 gr lieferten. Die folgende Tabelle zeigt nun, welche Federspannungen den Zugkräften der sinkenden Gewichte im § 15 entsprechen.

	1 Feder	2 Federn parallel	1 Feder	2 Federn parallel
Reibungsgewicht	6,85 gr	6,85 gr	13,90 gr	13,90 gr
Zuggewicht . . .	12 „	24 „	12 „	24 „
Gesamtbelastung	18,85 „	30,85 „	25,90 „	37,90 „
Federspannung .	20,2 cm	18,95 cm	25,3 cm	20,75 cm

Dabei ist das Gewicht der Wagschale mit 5,015 gr in den Reibungsbetrag eingerechnet. Zur Bestimmung der Spannungen war der Wagen auf der hochgestellten Fallrinne festgeklemmt und die eine, bezw. zwei parallelen Spiralen zwischen Wagen und Seidenfaden ev. mit Benutzung eines kleinen Drahtbügels, der die beiden Endkarabiner verband, eingeschaltet.

Die Fallrinne wurde sodann auf den Experimentiertisch heruntergesetzt, horizontal ausgerichtet und mit den Spannungswerten der letzten Reihe die Versuche 1, 2, 4 und 5 des § 15 wiederholt. Es ist nur natürlich, dass sich dabei die dort erhaltenen Resultate bestätigten, soweit es die in Ansehung der Konstanz immerhin unsichere Methode zuliess. Am schwierigsten war wieder derjenige Versuch, bei welchem die doppelte Wagenlast durch die einfache Zugkraft in Bewegung gesetzt wird.

Dies Gelingen würde jedenfalls in Frage gestellt werden wenn die Spannung bei allen vier Versuchen gleichmässig auf eine mittlere, etwa 21 cm eingestellt würde. Und dies ist nun pädagogisch das Entscheidende. Hält man die Spannungen eben konstant, wie es für den Anfänger notwendig erscheint, so fallen die Versuche, namentlich der bezeichnete, nicht exakt aus, ändert man aber die Spannungen etwa in der Weise, wie es in den obigen Versuchen geschehen ist, so bringt man damit ein Element hinein, das für den Schüler notwendigerweise den Anschein der Willkürlichkeit haben wird und damit die ganze Versuchsanordnung wertlos macht. Und die Sachlage müsste sich sicher noch ungünstiger gestalten, wenn man den Wagen nicht auf einem Schienengeleise, sondern ohne Führung auf der Holzfläche des Experimentiertisches laufen liesse, etwa, wie bei Lodge, Holzklötze auf untergelegten Rollen.

18. Abhilfe könnte hier nur geschaffen werden, wenn man die Wagenräder in Spitzen laufen liesse, wozu, wie schon einmal bemerkt, die Genauigkeit der benutzten Schiene

nicht hinreichte. Hier ergibt sich nun ein anderer möglicher Weg, welcher von Herrn E. Wiechert, damaligem Assistenten am hiesigen mathematisch-physikalischen Institut bei Gelegenheit einer Demonstration in der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft eingeschlagen wurde. Er benutzte nämlich nicht einen Wagen als bewegte Masse, sondern Stücke von messingnen Hohlzylindern, welche mit Blei vollgegossen waren und vermittelst eines aufgekeilten messingnen Führungsringes, dessen Breite der Einsattlung der Schiene entsprach, sehr gleichmässig auf der Fallrinne liefen. In das Blei waren achsial dünne Messingkerne beiderseits eingelassen, welche, ein wenig konisch vertieft, dazu dienten, die Enden eines um den Zylinder herum greifenden rechteckigen Drahtbügels aufzunehmen, an welchem der Zylinder mit der ziehenden Spiralfeder in Bewegung gesetzt werden konnte. An Stelle dieses nur vorläufigen Drahtbügels, der wegen seines leichten Aushakens ungeeignet war, wurde der Zylinder von mir mit einem flachen Rahmen aus Messing nach Art einer Chausseewalze umgeben, dessen in der Mittellinie verdickte Teile die Spitzen mit Schraubengewinde und Gegenmutter trugen, welche in die Pfannen der Bleizylinder eingriffen. Für die kleinere Walze betrug das Gewicht 778 gr, der Rahmen 43,4 gr für die grössere ebenso 1582 gr und 55,5 gr, so dass die Gesamtgewichte 821,4 gr und 1637,5 gr betrugen. Die um die Walzen herumlaufenden Rahmen waren gut ausbalanciert und hatten in ihrer vorderen Kante neben einander die drei Löcher zum Aufnehmen der zu den Spiralen führenden Karabiner. Der Vorteil dieser Einrichtung besteht einmal in der Einachsigkeit und zweitens darin, dass diese Achse nur einen sehr geringen Druck, nämlich den des Rahmens erleidet, so dass die Reibung also notwendigerweise beträchtlich verkleinert wird. Mit diesen beiden Walzen wurden nun zunächst Versuche nach Art der in Kapitel 2 beschriebenen angestellt. Die Reibung war so gering, dass die gewöhnlich benutzten Wagschalen nicht ausreichten und kleine flache Aluminiumdrahtspiralen mit zentrischen Häkchen oder Lederscheibchen an Aluminiumdraht als Träger der Übergewichte benutzt werden mussten. Für die kleinere Walze betrug die Reibung 1,92 gr, für die grössere 3,84 gr. In dieser Hinsicht sind also die Bleiwalzen dem früher benutzten Wagen entschieden überlegen.

Eine zweite Versuchsreihe beabsichtigte, unter Benutzung dieser Reibungswerte aus den Fallzeiten bekannter Zuggewichte in Art des Schlussschemas von Kapitel 2 die Trägheitsmomente, bezw. Ersatzmassen der Bleiwalzen zu

bestimmen. Diese Methode ergab sich aber auch hier als durchaus unzuverlässig. Das Ohr ist eben, selbst wenn es geübt ist, der ihm hier gestellten Aufgabe nicht gewachsen, es blieb daher nichts anderes übrig, als jene Trägheitsmomente und Ersatzmassen aus Torsionsschwingungen zu ermitteln. Die Ersatzmasse des kleinen Zylinders ergab sich dabei zu 366 gr, die des grossen zu 743 gr, während ihre halben Massen 389 gr und 791 gr betrugen, ein Resultat, das in der Inhomogenität der Walzen, die gerade in ihren peripheren Teilen aus dem leichteren Messing bestanden, seine ausreichende Erklärung findet. Selbstverständlich waren bei diesen Versuchen die Rahmen der Walzen entfernt. Bei dieser Gelegenheit wurde nachträglich auch noch das Trägheitsmoment und die Ersatzmasse von der Rolle der Atwoodschen Fallmaschine bestimmt und ergab sich zu 35,03 gr ein Resultat, das mit dem früher, bei ca. halb so viel Hilfsmessungen gewonnenen und oben benutzten, nämlich 36,03 gr hinlänglich übereinstimmt.

Aus den bei der zweiten Versuchsreihe gewonnenen Erfahrungen war zu entnehmen, dass grössere Beschleunigungen für das Gelingen der Versuche günstiger waren; es wurden daher für die Hauptversuche Zuggewichte von 18 und 36 gr gewählt. Mit diesen erhielt ich folgende Ergebnisse:

Versuch	Gesamtmasse	Zuggewicht	Reibungsgewicht	Fallzeit	Fallraum	Beschleunigung
1	1241,73 gr	18 gr	1,92 gr	3 sec. 4 „	64,02 cm 113,8 „	14,226 cm $sec.^{-2}$
2	1259,73 gr	36 gr	„	2 sec. 3 „	56,1 cm 126,2 „	28,046 cm $sec.^{-2}$
3	2434,86 gr	18 gr	3,84 gr	5 sec. 6 „	90,7 cm 130,6 „	7,255 cm $sec.^{-2}$
4	2452,86 gr	36 gr	„	3 sec. 4 „	64,8 cm 115,2 „	14,40 cm $sec.^{-2}$

Die Zahlen für die Gesamtmassen berechnen sich in folgender Weise:

	Versuch 1.	Versuch 3.
Gewicht der Bleiwalze . . .	778 gr	1582 gr
Ersatzmasse derselben . . .	366 „	743 „
Rahmengewicht	43,39 „	55,52 „
Faden	0,31 „	0,31 „
Ersatzmasse der Rolle . . .	36,03 „	36,03 „
Zuggewicht	18,00 „	18,00 „
	1241,73 gr	2434,86 gr

In Versuch 2 und 4 erhöhen sich diese Werte um je 18 gr durch das vergrösserte Zuggewicht.

Von diesen Versuchen stimmten nur diejenigen mit der kleinen Walze völlig genau. Bei der grossen erwies sich der in der letzten Spalte befindliche, vorher berechnete Wert für die Beschleunigung als im geringen Masse — etwa 3½ % — zu klein gegenüber dem beobachteten. Vermutlich war das Gewicht der Walze, welches wegen seiner Grösse nur mit der Tafelwage und dem dazu gehörigen rohen Gewichtssatz bestimmt werden konnte, nicht fehlerfrei.

Die Zugkräfte der letzten Versuche wurden nun wieder in gleicher Weise wie oben in äquivalente Federspannungen umgesetzt; es ergab sich dabei:

	1 Feder	2 Federn parallel	1 Feder	2 Federn parallel
Reibungsgewicht .	1,92 gr	1,92 gr	3,84 gr	3,84 gr
Zuggewicht . . .	18 „	36 „	18 „	36 „
Gesamtbelastung .	19,92 „	37,92 „	21,84 „	39,84 „
Federspannung . .	19,9 cm	19,45 cm	20,1 cm	20,15 cm

Bei den nun folgenden Hauptversuchen war wieder die bewegte Masse wegen der fehlenden Zuggewichte und Fallmaschinenrolle etwas kleiner als oben, und da die Walzen nicht eine Ergänzung auf die volle Höhe gestatteten, so mussten die Beschleunigungen etwas grösser als oben ausfallen. Die dafür ausgerechneten Beträge wurden durch die Versuche bestätigt.

Vergleicht man die letzte Horizontalreihe dieser Tabelle mit der entsprechenden Reihe (S. 25), so ergibt sich mit überzeugender Deutlichkeit, wie viel günstiger bei dieser Versuchsanordnung die Bedingungen für die Anwendung von Spiralen als Zugkräften liegen.

In der Tat sind die Unterschiede in den Spannungen bei den vier Versuchen dieses Mal so gering geworden, dass

eine mittlere Spannung keine irgendwie auffallende Abweichung für die zu bestätigenden Werte der Beschleunigung erkennen lässt.

Haben die Versuche also nach dieser Seite hin den wünschenswerten Grad von Vollkommenheit erreicht, so wird dieser Vorzug durch die hohen Beträge der Ersatzmassen einigermassen beeinträchtigt; zwar nicht für den Schüler, da das allein für ihn in Betracht kommende Verhältnis der bewegten Massen 1 : 1,993 durch das Hinzutreten der Ersatzmassen von 366, resp. 743 gr. nur in ganz unerheblichem Masse, nämlich auf 1 : 2,005 geändert erscheint. Wohl aber muss der Lehrer zur Bestimmung dieser Ersatzmassen, die er für die Vorausberechnung der Beschleunigung notwendig braucht, wenn die Versuche hinlänglich genau ausfallen sollen, — den mühsamen und für Schulkabinette wenig bequemen Umweg über die Methode der Torsionsschwingungen wählen. Sie gleich den halben Massen anzusetzen, ist unstatthaft, da man gar nicht wissen kann, ob der Bleiguss nicht Blasen enthält, und sie aus den Versuchen selbst abzuleiten, scheint, wie schon bemerkt, nach meinen Erfahrungen verfehlt.

Von geringerer Bedeutung ist daneben die Unveränderlichkeit der einmal durch den Apparat festgelegten Massen und der sich bei häufigem Gebrauch doch geltend machende Übelstand, dass der relativ flache Führungsreif ein Entgleisen der schweren Walzen und infolgedessen eine Verletzung der zarten Zugspiralen nicht genügend verhindert.

Allen elastische Bänder als Zugkräfte benutzenden Methoden gemeinsam ist aber der Übelstand der geringen Präzision, da einmal trotz aller Sorgfalt des Experimentierenden die Zugspannung sich nicht völlig konstant erhalten lässt, und da zweitens die allein vorhandenen Sehmarken, besonders wenn sie mit beträchtlicher Geschwindigkeit passiert werden, eine genaue Kontrolle unmöglich machen. Einen Apparat für hörbaren Anschlag aber anzubringen, ist durch die Versuchsanordnung ausgeschlossen.

19. Schluss. Eine abschliessende Vergleichung der vier untersuchten Methoden zeigt diejenigen, welche elastische Zugkräfte benutzen, gegenüber den anderen gegenwärtig im Nachteil. Die exaktesten Ergebnisse bei leichtester Handhabung liefert auch heutzutage noch die Atwoodsche Fallmaschine, obwohl es nicht ausgeschlossen scheint, dass der noch verhältnismässig junge Schienen-

apparat — oder auch nur sein horizontaler Teil — eine derartige Modifikation erhält, dass er mit dem älteren Apparat zu konkurrieren vermag. Immer aber ist zur Erzielung möglichst sauberer Versuchsergebnisse die Vorausberechnung der Beschleunigungen erforderlich. Das bedingt die ziffernmässige Kenntnis aller vorhandenen Trägheitsmomente und Reibungskräfte, die sich mit Hilfe ganz einfacher Vorrichtungen und Messungen leicht auswerten lassen, wenn man sie, von einander getrennt, nach einer zuverlässigen Methode bestimmt. Es wäre zu wünschen, dass auch die massgebenden deutschen Lehrbücher diesen Verhältnissen Rechnung trügen, wie das z. B. in französischen[1]) Werken bereits der Fall ist.

Die vorstehende Untersuchung ist ganz im Sinne einer grösseren Praktikantenaufgabe in einem physikalischen Laboratorium gedacht. Würden die Lehramtskandidaten an unsern Hochschulen etwa nach ihrem fünften Semester regelmässig mit derartig kritisch-vergleichenden und messenden Aufgaben betraut an Apparaten, die nicht mit dem Verlassen der Hochschule hinter ihnen versinken, sondern sie in ihren Schulsammlungen wieder erwarten, würden sie im Praktikum nicht so überwiegend Materialkonstanten messen, sondern auch Apparatkonstanten und die Verwertung solcher Messungeu zur Bestätigung grundlegender Naturgesetze lernen, so könnte die Ausbildung für ihren Beruf als Physiker nicht unwesentlich gefördert werden.

---

1) Vergl. Henri Abraham, Recueil d'expériences élementaires de physique, Paris 1904, tome I, pag. 107.